

Τετραγωνικά μοντέλα

Δ. Γ. Παπαγεωργίου
Τμήμα Μηχανικών Επιστήμης Υλικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

dparageo@uoi.gr
<http://pc164.materials.uoi.gr/dparageo>

Τετραγωνικό μοντέλο συνάρτησης

Για συνάρτηση μιας μεταβλητής

Παρατήρηση:

Κάθε συνάρτηση κοντά στο ελάχιστο μοιάζει με μια παραβολή.

Ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(x)$ γύρω από σημείο a

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^m}{m!}f^{(m)}(a)$$

Κρατάμε μέχρι και τους όρους δεύτερης τάξης:

Τετραγωνικό μοντέλο συνάρτησης

$$q(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(a)$$

Πολύωνυμο δεύτερου βαθμού (παραβολή)

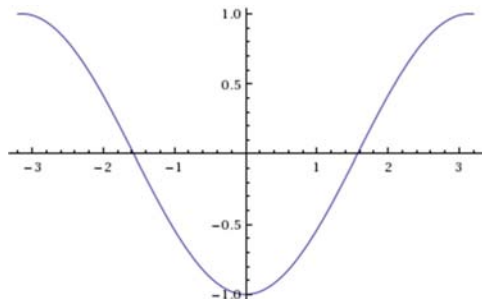
Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #1

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = -\cos x$$

Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το σημείο $a = 0$

Σημείωση: Το σημείο $a = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο της $f(x)$



Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #1

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(a)$$

Χρειαζόμαστε τα $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$

$$f(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'(x) = \sin x$$

$$f'(0) = \sin 0 = 0$$

$$f''(x) = \cos x$$

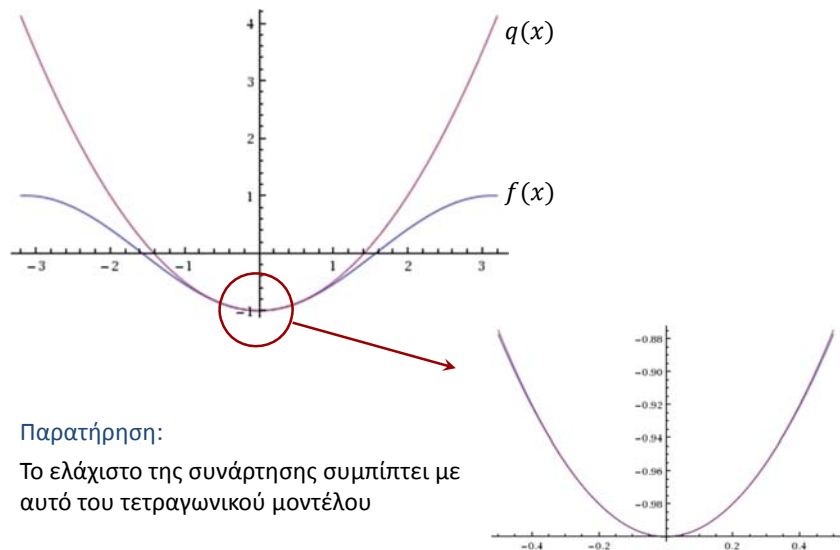
$$f''(0) = \cos 0 = 1$$

Συνεπώς το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το $a = 0$ είναι:

$$q(x) = -1 + (x - 0) \cdot 0 + \frac{(x - 0)^2}{2} \cdot 1 \Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{x^2}{2} - 1$$

Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #1



Παρατήρηση:

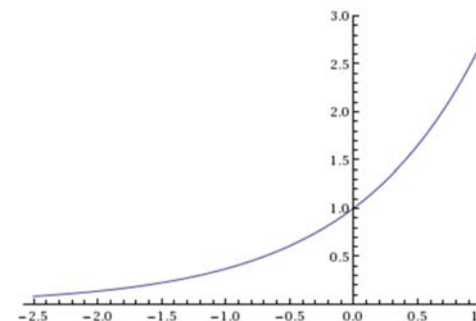
Το ελάχιστο της συνάρτησης συμπίπτει με αυτό του τετραγωνικού μοντέλου

Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #2

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = e^x$$

Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το σημείο $a = 0$



Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #2

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(a)$$

Χρειαζόμαστε τα $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x$$

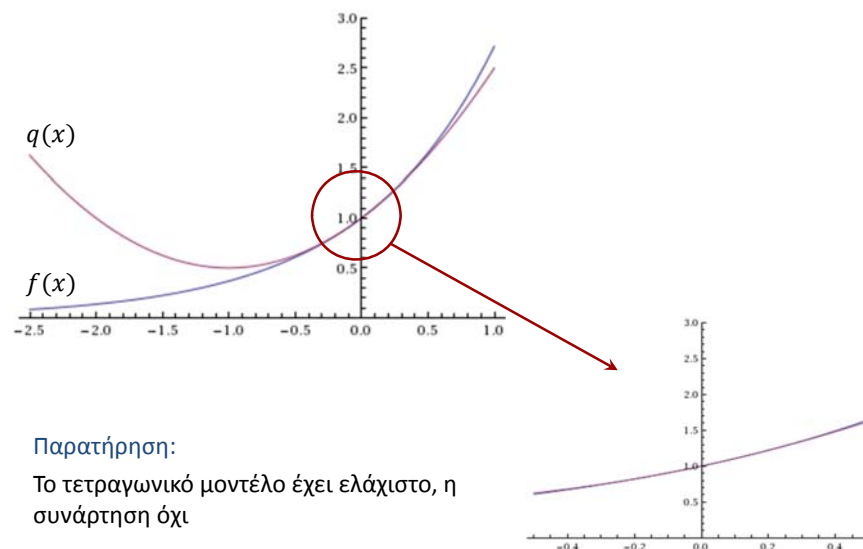
$$f''(0) = e^0 = 1$$

Συνεπώς το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το $a = 0$ είναι:

$$q(x) = 1 + (x - 0) \cdot 1 + \frac{(x - 0)^2}{2} \cdot 1 \Rightarrow$$

$$q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Παράδειγμα τετραγωνικού μοντέλου #2



Παρατήρηση:

Το τετραγωνικό μοντέλο έχει ελάχιστο, η συνάρτηση όχι

Το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου

Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

$$q(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(a)$$

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$q'(x) = f'(a) + (x - a)f''(a)$$

Βρίσκουμε που μηδενίζεται:

$$q'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$f'(a) + (x - a)f''(a) = 0 \Rightarrow$$

$$x - a = -\frac{f'(a)}{f''(a)} \Rightarrow$$

$$x = a - \frac{f'(a)}{f''(a)}$$

Ελέγχουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$q''(x) = f''(a)$$

Το τετραγωνικό μοντέλο έχει την ίδια δεύτερη παράγωγο με την πραγματική συνάρτηση στο σημείο a .

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x}(x - 2)^2$$

- Βρείτε αναλυτικά το σημείο στο οποίο η $f(x)$ έχει ελάχιστο.
- Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το ελάχιστο.
- Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;
- Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το σημείο $a = 1$.
- Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Παράδειγμα

- Βρείτε αναλυτικά το σημείο στο οποίο η $f(x) = e^{-x}(x - 2)^2$ έχει ελάχιστο.

Βρίσκουμε τις παραγώγους:

$$f'(x) = -e^{-x}(x - 2)^2 + 2e^{-x}(x - 2) =$$

$$e^{-x}(x - 2)(-x + 2 + 2) =$$

$$e^{-x}(x - 2)(4 - x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2)^2 - 2e^{-x}(x - 2) - 2e^{-x}(x - 2) + 2e^{-x} =$$
$$e^{-x}(x - 2)^2 - 4e^{-x}(x - 2) + 2e^{-x}$$

Βρίσκουμε που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$e^{-x}(x - 2)(4 - x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$

Για κάθε λύση εξετάζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(2) = \frac{2}{e^2} > 0 \Rightarrow$$

ελάχιστο

$$f''(4) = \frac{1}{e^4}(4 - 2)^2 - 4\frac{1}{e^4}(4 - 2) + \frac{2}{e^4} =$$

$$\frac{4}{e^4} - 4\frac{2}{e^4} + \frac{2}{e^4} = -\frac{2}{e^4} < 0 \Rightarrow$$

μέγιστο

Παράδειγμα

- Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το ελάχιστο.

Έχουμε βρει ότι:

$$f(x) = e^{-x}(x - 2)^2$$

$$f'(x) = e^{-x}(x - 2)(4 - x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2)^2 - 4e^{-x}(x - 2) + 2e^{-x}$$

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2}$$

$$\text{Για } a = 2$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(2) = 0$$

$$f''(2) = \frac{2}{e^2}$$

$$q(x) = \frac{(x - 2)^2}{2} \frac{2}{e^2} \Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{(x - 2)^2}{e^2}$$

Παράδειγμα

c. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Βρήκαμε ότι:

$$q(x) = \frac{(x-2)^2}{e^2}$$

Οι παράγωγοι του μοντέλου είναι:

$$q'(x) = \frac{2}{e^2}(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

Παράδειγμα

d. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης γύρω από το σημείο $a = 1$.

Έχουμε βρει ότι:

$$f(x) = e^{-x}(x-2)^2$$

$$f'(x) = e^{-x}(x-2)(4-x)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x-2)^2 - 4e^{-x}(x-2) + 2e^{-x}$$

Για $a = 1$

$$f(1) = \frac{1}{e}(1-2)^2 = \frac{1}{e}$$

$$f'(1) = \frac{1}{e}(1-2)(4-1) = -\frac{3}{e}$$

$$f''(1) = \frac{1}{e}(1-2)^2 - \frac{4}{e}(1-2) + \frac{2}{e} = \frac{1}{e} + \frac{4}{e} + \frac{2}{e} = \frac{7}{e}$$

Το τετραγωνικό μοντέλο είναι:

$$q(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} \Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{1}{e} - \frac{3}{e}(x-1) + \frac{7(x-1)^2}{2e}$$

Παράδειγμα

e. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Βρήκαμε ότι:

$$q(x) = \frac{1}{e} - \frac{3}{e}(x-1) + \frac{7(x-1)^2}{2e}$$

Η παράγωγος του μοντέλου είναι:

$$q'(x) = -\frac{3}{e} + \frac{7}{e}(x-1)$$

$$q'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{3}{e} + \frac{7}{e}(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$7(x-1) = 3 \Rightarrow$$

$$x-1 = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$x = 1 + \frac{3}{7} \approx 1.43$$

Παραβολή σε πολλές διαστάσεις

Η παραβολή σε πολλές διαστάσεις έχει τη μορφή:

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$$

όπου:

\mathbf{A} Συμμετρικός πίνακας $N \times N$

\mathbf{b} Διάνουσμα

c Σταθερά

Υπενθύμιση: Πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων

Αν έχουμε: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}$ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$

Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = [\square \quad \square \quad \square] \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = \text{αριθμός}$$

$$\mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} [\square \quad \square \quad \square] = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \text{πίνακας}$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

$$\mathbf{A} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} = \text{διάνυσμα στήλη}$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{A} = [\square \quad \square \quad \square] \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = [\square \quad \square \quad \square] = \text{διάνυσμα γραμμή}$$

Υπενθύμιση: Πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων

Ανάστροφοι αθροισμάτων

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^T = \mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

Πρώτες παράγωγοι

$$\nabla(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) = \nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{a}) = \mathbf{a}$$

Ανάστροφοι γινομένων

$$(\mathbf{a}^T \mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{a}$$

Για συμμετρικό πίνακα \mathbf{A}

$$\nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2 \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\nabla^2(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2 \mathbf{A}$$

Μέτρο διανύσματος

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$$

Υπενθύμιση: Συμβολισμοί

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix} \quad \text{Το διάνυσμα πρώτων παραγώγων της συνάρτησης.}$$

Συμβολίζεται και με $\mathbf{g}(\mathbf{x})$

Ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης.

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

Παραβολή σε πολλές διαστάσεις. Παράδειγμα #1

Παραβολή με $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $c = 0$

Γράφουμε το διάνυσμα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \Rightarrow$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \Rightarrow$$

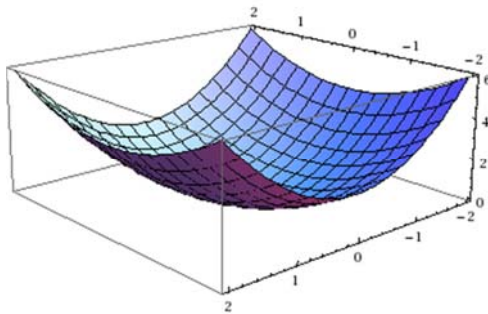
$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2$$

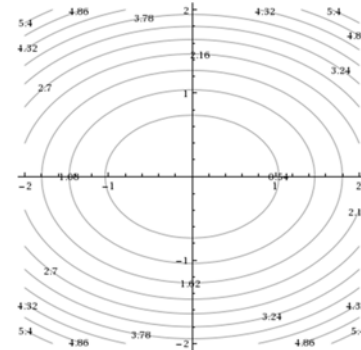
Παραβολή σε πολλές διαστάσεις. Παράδειγμα #1

$$q(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2$$

Τρισδιάστατη απεικόνιση



Ισοϋψείς καμπύλες



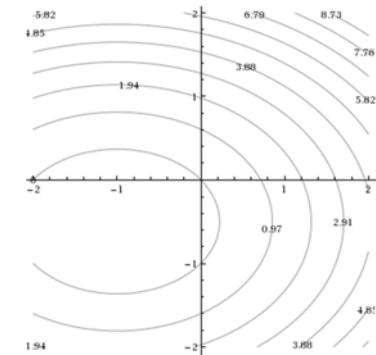
Παραβολή σε πολλές διαστάσεις. Παράδειγμα #2

Πως γίνεται το προηγούμενο παράδειγμα αν το διάνυσμα \mathbf{b} έχει μη μηδενική τιμή; Πχ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \Rightarrow$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + [1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + x_1 + x_2$$



Παραβολή σε πολλές διαστάσεις. Παράδειγμα #3

Παραβολή με μη διαγώνιο πίνακα \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = 0$$

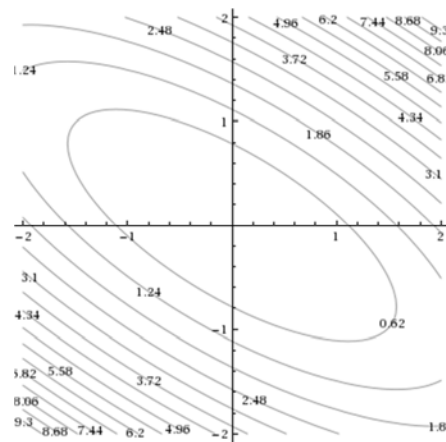
$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \Rightarrow$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \Rightarrow$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \{x_1(x_1 + x_2) + x_2(x_1 + 2x_2)\} \Rightarrow$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + x_1 x_2$$



Το ελάχιστο της παραβολής

Θα βρούμε που έχει ελάχιστο η παραβολή:

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$$

Υπολογίζουμε τις πρώτες παραγώγους:

$$\nabla q(\mathbf{x}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \right) =$$

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \right) + \nabla(\mathbf{b}^T \mathbf{x}) + \nabla(c) =$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Βρίσκουμε που μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι:

$$\nabla q(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = -\mathbf{b} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

Οι δεύτερες παράγωγοι είναι:

$$\nabla^2 q(\mathbf{x}) = \nabla(\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}) =$$

$$\nabla(\mathbf{A} \mathbf{x}) + \nabla \mathbf{b} =$$

$$\mathbf{A}$$

Παράδειγμα

Βρείτε το ελάχιστο της τετραγωνικής συνάρτησης

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$$

με $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $c = 0$

Η τετραγωνική συνάρτηση είναι:

$$q(x, y) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 0 =$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix} + y =$$

$$\frac{1}{2} (x(x+y) + y(x+2y)) + y =$$

$$\frac{1}{2} (x^2 + 2xy + 2y^2) + y \Rightarrow$$

$$q(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 + xy + y$$

Βρίσκουμε τις παραγώγους:

$$(1) \frac{\partial q}{\partial x} = x + y = 0$$

$$(2) \frac{\partial q}{\partial y} = 2y + x + 1 = 0$$

Αντικαθιστώ την (1) στην (2)

$$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

Από την (1)

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Παράδειγμα

Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας δευτέρων παραγώγων της $q(\mathbf{x})$ είναι ο \mathbf{A} .

Πρέπει να δούμε αν είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.

Σχηματίζουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών του πίνακα \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{w} = 0$$

Πρέπει η ορίζουσα του $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ να είναι μηδέν.

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 1 =$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 - 1 =$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

Βρίσκω τις λύσεις:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Και οι δύο ιδιοτιμές είναι θετικές, άρα ο πίνακας \mathbf{A} είναι θετικά ορισμένος, άρα το σημείο $(1, -1)$ είναι ελάχιστο.

Τετραγωνικό μοντέλο πολυδιάστατης συνάρτησης

Ανάπτυγμα Taylor πολυδιάστατης συνάρτησης γύρω από το σημείο \mathbf{a} όπου κρατάμε μέχρι τους όρους δεύτερης τάξης.

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{g}(\mathbf{a})^T (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

ή (θέτω όπου \mathbf{a} το \mathbf{x} , όπου \mathbf{x} το $\mathbf{x} + \mathbf{h}$)

$$q(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{h}$$

Χρησιμοποιούμε την πρώτη μορφή:

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{g}^T \mathbf{x} - \mathbf{g}^T \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T - \mathbf{a}^T) (\mathbf{G} \mathbf{x} - \mathbf{G} \mathbf{a}) =$$

$$f(\mathbf{a}) + \mathbf{g}^T \mathbf{x} - \mathbf{g}^T \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{a}) =$$

Όμως επειδή ο \mathbf{G} είναι συμμετρικός (δηλαδή $\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$):

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{a})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{a})^T = \mathbf{a}^T \mathbf{G}^T \mathbf{x}^T = \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{a})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{a} \\ (\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{a})^T = \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{x}$$

Τετραγωνικό μοντέλο πολυδιάστατης συνάρτησης

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{g}^T \mathbf{x} - \mathbf{g}^T \mathbf{a} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - 2\mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{a}) \Rightarrow$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{g}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{G})}_{\mathbf{b}^T} \mathbf{x} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{a} - \mathbf{g}^T \mathbf{a} + f(\mathbf{a})}_{c}$$

Το $q(\mathbf{x})$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$$

με

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{g} - \mathbf{G} \mathbf{a}$$

$$c = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{G} \mathbf{a} - \mathbf{g}^T \mathbf{a} + f(\mathbf{a})$$

Το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου

Βρήκαμε ότι το ελάχιστο μιας πολυδιάστατης παραβολής είναι:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Αντικαθιστώντας:

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{a}$$

Παίρνουμε:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{a}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{g} + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{a} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{g}$$

Ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 e^y$$

Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το σημείο $\mathbf{a} = (1, 0)$.

Το τετραγωνικό μοντέλο προκύπτει από τη σειρά Taylor όπου $\mathbf{a} = (1, 0)$

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{g}(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο (1,0)

$$f(1, 0) = 1^2 e^0 = 1$$

Παράδειγμα

Θα υπολογίσουμε τις πρώτες παραγώγους:

$$f(x, y) = x^2 e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y$$

Συνεπώς:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε τις δεύτερες παραγώγους:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xe^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2xe^y$$

Συνεπώς:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{g}(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) =$$

$$1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$1 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x-1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} =$$

$$1 + 2(x-1) + y + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x-1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(x-1) + 2y \\ 2(x-1) + y \end{bmatrix} =$$

$$1 + 2(x-1) + y + \frac{1}{2} (2(x-1)^2 + 2(x-1)y + 2y(x-1) + y^2) \Rightarrow$$

$$q(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + 2xy - y$$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = -e^{-x^2} + y - \frac{y^3}{6}$$

- Βρείτε το ελάχιστο.
- Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το ελάχιστο.
- Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;
- Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το σημείο $\mathbf{a} = (0, -1)$.
- Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Παράδειγμα

a. Βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x, y) = -e^{-x^2} + y - \frac{y^3}{6}$$

Οι πρώτες παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{y^2}{2} = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{2}$$

Έχουμε δύο στάσιμα σημεία $(0, \sqrt{2})$ και $(0, -\sqrt{2})$.

Θα εξετάσουμε σε ποια από τις δύο περιπτώσεις ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων έχει θετικές ιδιοτιμές.

Οι δεύτερες παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Παράδειγμα

Για το σημείο $(0, \sqrt{2})$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Σχηματίζω το πρόβλημα ιδιοτιμών του \mathbf{G}

$$\mathbf{G}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w} = 0$$

Πρέπει η ορίζουσα του $(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{I})$ να είναι μηδέν.

$$|\mathbf{G} - \lambda\mathbf{I}| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}-\lambda \end{bmatrix} \right| =$$

$$(2-\lambda)(-\sqrt{2}-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \begin{cases} 2 \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

Είναι σαγματικό σημείο.

Για το σημείο $(0, -\sqrt{2})$

$$|\mathbf{G} - \lambda\mathbf{I}| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

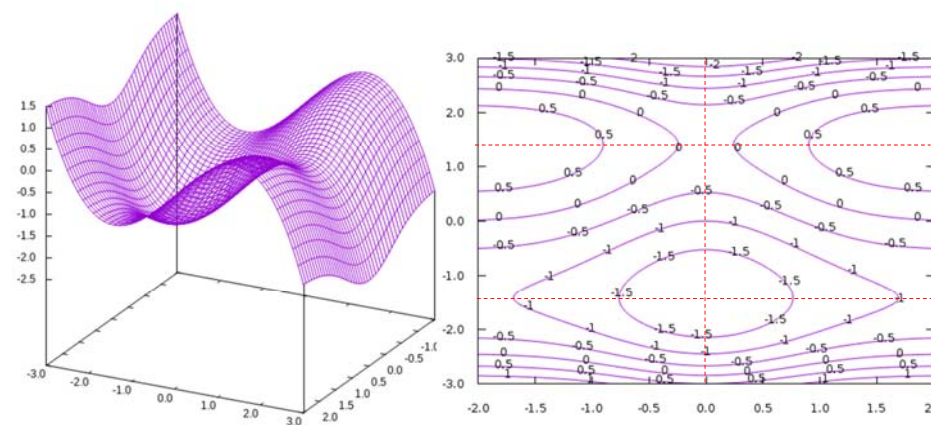
$$\left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-\lambda \end{bmatrix} \right| =$$

$$(2-\lambda)(\sqrt{2}-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \begin{cases} 2 \\ \sqrt{2} \end{cases}$$

Είναι ελάχιστο.

Παράδειγμα



Παράδειγμα

b. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το ελάχιστο.

Το τετραγωνικό μοντέλο προκύπτει από τη σειρά Taylor όπου $\mathbf{a} = (0, -\sqrt{2})$ είναι το ελάχιστο:

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{g}(\mathbf{a})^T (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Οι παράγωγοι στο ελάχιστο είναι μηδέν, συνεπώς:

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο ελάχιστο:

$$f(\mathbf{a}) = f(0, -\sqrt{2}) = -e^{-0^2} - \sqrt{2} - \frac{(-\sqrt{2})^3}{6} = -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \\ &= -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \right) = \\ &= -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y + \sqrt{2} \end{bmatrix} = \\ &= -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x \\ \sqrt{2}y + 2 \end{bmatrix} = \\ &= -1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} (2x^2 + \sqrt{2}y^2 + 4y + 2\sqrt{2}) \Rightarrow \\ q(x, y) &= x^2 + \frac{y^2}{\sqrt{2}} + 2y - 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Παράδειγμα

c. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου ;

Βρήκαμε ότι:

$$q(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{\sqrt{2}} + 2y - 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

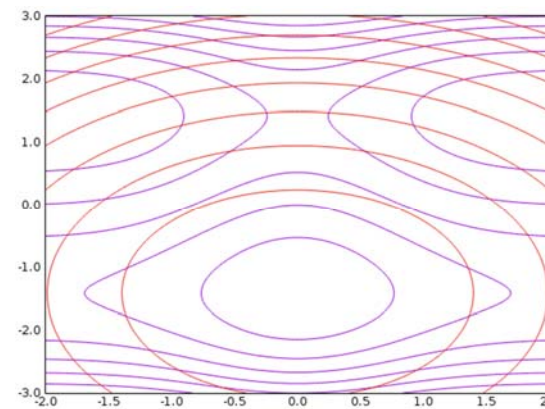
Οι παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{2}} + 2 = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{2}$$

Για το σημείο $(0, -\sqrt{2})$ ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων είναι θετικά ορισμένος ;

Παράδειγμα



Παράδειγμα

d. Βρείτε το τετραγωνικό μοντέλο γύρω από το σημείο $\mathbf{a} = (0, -1)$.

Το τετραγωνικό μοντέλο προκύπτει από τη σειρά Taylor όπου $\mathbf{a} = (0, -1)$

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{g}(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Θα υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο $(0, -1)$

$$f(x, y) = -e^{-x^2} + y - \frac{y^3}{6}$$

$$f(\mathbf{a}) = f(0, -1) = -e^{-0^2} - 1 + \frac{1}{6} = -\frac{11}{6}$$

Παράδειγμα

Θα υπολογίσουμε τις πρώτες παραγώγους στο σημείο $(0, -1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{y^2}{2}$$

Συνεπώς:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε τις δεύτερες παραγώγους στο σημείο $(0, -1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

Συνεπώς:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{g}(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{G}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) =$$

$$-\frac{11}{6} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{11}{6} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y+1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y+1 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{11}{6} + \frac{1}{2}(y+1) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x \\ y+1 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{11}{6} + \frac{1}{2}(y+1) + \frac{1}{2}(2x^2 + (y+1)^2) \Rightarrow$$

$$q(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{5}{6}$$

Παράδειγμα

e. Ποιο είναι το ελάχιστο του τετραγωνικού μοντέλου;

Βρήκαμε ότι:

$$q(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y - \frac{5}{6}$$

Οι παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = y + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Για το σημείο $(0, -\frac{3}{2})$ ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων είναι θετικά ορισμένος;